9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában – megoldások

1107 *a)* $5n + 4,\ n \in \mathbb{N}$; *b)* $8n + 5,\ n \in \mathbb{N}$; *c)* $100n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
d) $100n + 17,\ n \in \mathbb{N}$; *e)* $\frac{7}{3n},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$; *f)* $\frac{4n}{4n+3},\ n \in \mathbb{Z}$.

1108 *a)* A 9-cel osztható pozitív egész számokat.
b) Azokat a pozitív egész számokat, melyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul.
c) A 23-ra végződő legalább háromjegyű pozitív egész számokat.
d) A 2-nél *a*-val kisebb egész számokat (az összes egész számot).
e) A négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb természetes számokat.
f) A 3-mal osztva 2 maradékot adó természetes számok 10-ed részét.

1109 *a)* $-4{,}2xy$; $-4xz$; $-2{,}8xyz$; $3{,}6xyz$; $3{,}8xyz$. *b)* $-7ab^2$; $-6ab$; $-6ab$; $-4{,}4a^4b$; $-4{,}2a^2$.

1110 *a)* -3; *b)* 70; *c)* -2; *d)* 8; *e)* $\frac{4}{3}$; *f)* $\frac{3869}{300}$.

1111 *a)* $x \neq 0$; *b)* $x \neq -2$; *c)* $a \neq -\frac{3}{2}$; *d)* $x \neq 0,\ x \neq 1$;
e) $x \neq \frac{4}{5},\ x \neq -\frac{1}{3}$; *f)* $a \neq -\frac{7}{2},\ a \neq \frac{3}{8}$; *g)* $y \neq 3,\ y \neq -3,\ y \neq 2,\ y \neq -2$.

1112 Az oldalak: $2x - 2,\ 2x,\ 2x + 2$. A kerület: $6x,\ x \in \mathbb{N},\ x > 1$.

1113 *a)* Mivel $a = 3n + 2$, attól függően, hogy n 4-gyel osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet $2, 5, 8$ vagy 11.
Mivel $b = 4k + 3$, attól függően, hogy k 3-mal osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet $3, 7$ vagy 11.
b) Az előző esetek alapján, mivel a maradékok összeadódnak, a lehetséges maradékok: 0-tól 11-ig minden egész szám.

Hatványozás, a számok normálalakja – megoldások

1114 *a)* $2^6 < 2^8$; *b)* $2^{16} > 2^{12}$; *c)* $3^6 < 3^9$; *d)* $2^{15} < 2^{16}$;
e) $2^3 \cdot 3^3 < 3^3 \cdot 2^4$; *f)* $3^{21} > 3^{20}$; *g)* $2^{15} \cdot 5^{15} > 2^{12} \cdot 5^{15}$; *h)* $4^{100} \cdot 10^{100} > 10^{100}$.

1115 *a)* 2; *b)* 12; *c)* 4; *d)* 9; *e)* 1; *f)* 18.

1116 *a)* a^{41}; *b)* x^{36}; *c)* x^{11}; *d)* b; *e)* x^{26}; *f)* $a^4 \cdot b^3$;
g) $a^6 \cdot b^3$; *h)* $\frac{c^8}{d^6}$.

1117 *a)* $\frac{1}{81}$; *b)* $-\frac{1}{125}$; *c)* 8; *d)* 49; *e)* $-\frac{27}{125}$; *f)* $\frac{25}{16}$;
g) $\frac{4}{9}$; *h)* $-\frac{2}{5}$; *i)* $\frac{4}{9}$; *j)* 7.

1118 A kitevők:

a) $-2,\ -4,\ -5,\ -8,\ -10,\ 30;$ *b)* $-2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -11,\ 40.$

1119 *a)* $a^3;$ *b)* $x^{10};$ *c)* $\frac{1}{8a};$ *d)* $a^6 \cdot b^8;$ *e)* $\frac{5^{10}}{b^{12}};$ *f)* $c^5;$

g) $a^{30} \cdot b^3;$ *h)* $\frac{d^{21}}{9};$ *i)* $\frac{2^{18} \cdot 3^4}{e^5}.$

1120 *a)* $\frac{1}{216} > \frac{1}{729};$ *b)* $\frac{1}{2^{12}} > \frac{1}{2^{16}};$ *c)* $\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{10}} < \frac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}};$

d) $\frac{7^3}{4^3} > \frac{7^3}{5^3};$ *e)* $\frac{7^2}{5^3} < \frac{7^3}{5^3};$ *f)* $3^8 = 3^8;$

g) $\frac{8}{7} < 1{,}6.$

1121 *a)* $61\ \text{kg} = 6{,}1 \cdot 10^4\ \text{g} = 6{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{t};$ *b)* $3{,}77 \cdot 10^{14}\ \text{g} = 3{,}77 \cdot 10^8\ \text{t}.$

1122 *a)* $3{,}33 \cdot 10^{-12}\ \text{s};$ *b)* $8{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$

1123 $4^4 = 2^8,\ 8^8 = 2^{24}$, ezért $\left(4^4\right)^3 = 8^8.$

1124 A szorzat átalakítható: $2^{2007} \cdot 125^{345} \cdot 25^{200} = 2^{2007} \cdot 5^{1035} \cdot 5^{400} = 10^{1435} \cdot 2^{572}$. A szorzat tehát 1435 darab 0-ra végződik.

1125 *a)* Igaz. Egész és törtszámok esetén is teljesül.
b) Hamis. A negatív számoknak a páratlan kitevős hatványai negatívak.
c) Igaz. A páros kitevős hatványok pozitívak.
d) Hamis. Lehetnek törtek is.
e) Hamis. Az 1-nek minden hatványa 1.

1126 A tömeg: $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10^6\ \text{g} \approx 6{,}67 \cdot 10^3\ \text{kg} = 6{,}67\ \text{t}.$

1127 *a)* $3^5 = 243.$ *b)* $3^4 = 81$-szeresére növekszik.

1128 *a)* $1{,}56 \cdot 10^{17}\ \text{m}.$ *b)* $1{,}04 \cdot 10^6 = 1\,040\,000$-szerese.

1129 Csak a 2 és 3 hatványai jöhetnek szóba.
Ha a kihúzott számok a

$$2^0 = 1,\quad 2^1 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 2^3 = 8,\quad 2^4 = 16,\quad 2^5 = 32,\quad 2^6 = 64$$

közül kerülnek ki, akkor $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ eset lehetséges.

Ha a kihúzott számok a

$$3^0 = 1,\quad 3^1 = 3,\quad 3^2 = 9,\quad 3^3 = 27,\quad 3^4 = 81,$$

akkor 1 eset fordulhat elő.
Tehát összesen $21 + 1 = 22$ esetben lehetnek a kihúzott számok ugyanazon szám egész kitevős hatványai.

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei – megoldások

1130 a) $-6a^2 + a - 3$; b) $b^3 + 3b^2 - 3$; c) $-3cd^2 - 3c^2 + 5d + 3$;
d) $a^2 - 6a + 6$; e) 1; f) $a^2 - 8a - 23$;
g) $-3x^3 + 8x^2 - 14x + 4$; h) $8x + 8$; i) $-6a^2 - 7a + 7$;
j) $16x^2 - 21x - 4$; k) $x + 5$; l) $12x^2 - 30x - 26$.

1131 a) $-3b + 3 = 1$; b) $-a - 3 = -1$; c) $-2a + 1 = 5$;
d) $-3b - 15a - 6 = 22$; e) $9b + 14a = -22$; f) $a + 6b = 2$.

1132 a) $a^2 + 14a + 49$; b) $64 - 16b + b^2$; c) $49 - 14b + b^2$;
d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$; e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$; f) $100a^2 - 60ab + 9b^2$;
g) $x^4 + 6x^2z + 9z^2$; h) $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$; i) $64a^6 - 80a^3b^2 + 25b^4$;
j) $\frac{4}{9} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + \frac{1}{16}y^2$; k) $\frac{25}{36} \cdot x^2 - \frac{35}{9} \cdot xy + \frac{49}{9} \cdot y^2$;
l) $z^2 + 4x^2 + y^2 + 4zx + 2zy + 4xy$;
m) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$;
n) $16x^2 + \frac{4}{25} \cdot y^2 + \frac{1}{49} \cdot z^2 - \frac{16}{5} \cdot xy - \frac{8}{7} \cdot xz + \frac{4}{35} \cdot yz$.

1133 a) $(a + 4)^2 = (-a - 4)^2$; b) $(b - 5)^2 = (5 - b)^2$;
c) $(c + 7)^2 = (-c - 7)^2$; d) $(x - 20)^2 = (20 - x)^2$;
e) $\left(d^2 - 10\right)^2 = \left(10 - d^2\right)^2$; f) $\left(x^4 + 5\right)^2 = \left(-x^4 - 5\right)^2$;
g) $\left(x^3 + 3y^5\right)^2 = \left(-x^3 - 3y^5\right)^2$; h) $\left(0,5x - 6y^3\right)^2 = \left(6y^3 - 0,5x\right)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$.

1134 a) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; b) $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$;
c) $27c^6 + 108c^4 + 144c^2 + 64$; d) $64d^9 - 96d^6x^2 + 48d^3x^4 - 8x^6$;
e) $0,125x^6 + 1,5x^4y + 6x^2y^2 + 8y^3$; f) $\frac{8}{27} \cdot x^3 - \frac{16}{15} \cdot x^2y + \frac{32}{25} \cdot xy^2 - \frac{64}{125} \cdot y^3$.

1135 a) $9a^2 - 25$; b) $64x^2 - 49$; c) $16b^2 - 4x^2$; d) $36a^2 - 25b^2$;
e) $25c^2 - 9y^2$; f) $25a^6 - 1$; g) $9d^4 - 64$; h) $4y^2 - 81x^4$;
i) $49e^{10} - 100x^6$; j) $\frac{4}{49} \cdot x^{14} - \frac{1}{9} \cdot y^6$.

1136 a) $6a^2 - 2a + 14$; b) $8x^2 - 26x + 36$; c) $12x^2 + 64x + 9$;
d) $2x^2 + 50$; e) $-7b^2 - 32b + 48$; f) $-9x^2 + 24x - 31$;
g) $20c + 78$; h) $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 24x^2 + 12y^2 - 12xy$;
i) $-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 23$; j) $\frac{19}{4} \cdot y^2 - x^2 - 2xy$.

1137 a) $a^3 - 1$; b) $b^3 + 125$; c) $27x^3 + 64$.

1138 a) $(x-1)^2 - 4$; b) $(a+2)^2 + 2$; c) $(a+3)^2 - 8$;
d) $(x-4)^2 + 4$; e) $(a-5)^2 - 23$; f) $(x+6)^2 + 14$;
g) $(x+7)^2 - 18$; h) $2\cdot(x-4)^2 - 6$; i) $-(x+3)^3 + 12$;
j) $-(x-6)^2 + 37$; k) $3\cdot(x+2)^2 - 10$; l) $-5\cdot(x+2)^2 + 13$.

1139 a) $a\cdot(3a^2 - 2a + 1)$; b) $2x\cdot(3x^2 - 5x + 1)$; c) $4b\cdot(b^3 + 2b^2 + 7b - 1)$;
d) $5x\cdot(7x^2 + 3x + 4)$; e) $3a^2\cdot(2a^2 - 3a + 1)$; f) $4x^3\cdot(x^2 - 6x + 3)$;
g) $5a^2b\cdot(ab - 3b^2 + 2)$; h) $17ab^4\cdot(a^2b + ab^2 - 2)$; i) $8a^2b^3\cdot(2a^2 + 3b - 5a^2b)$.

1140 a) $(a+3)\cdot(b-2)$; b) $(2a+b)\cdot(x+1)$;
c) $(a+5)\cdot(2x+y)$; d) $(a-2x)\cdot(b+4)$;
e) $(x+2)\cdot(3a-b)$; f) $(4x-1)\cdot(a-2b) = (2b-a)\cdot(1-4x)$;
g) $(3a+4b)\cdot(2x+5)$; h) $(a-4x^2)\cdot(1-5b) = (4x^2-a)\cdot(5b-1)$;
i) $(3a^2-4b^3)\cdot(3-2x^2) = (4b^3-3a^2)\cdot(2x^2-3)$.

1141 a) $(4x-5)\cdot(4x+5)$; b) $(7a+10b)\cdot(7a-10b)$;
c) $(8b+3x)\cdot(8b-3x)$; d) $(6x^2-11y^3)\cdot(6x^2+11y^3)$;
e) $(x-10)^2 = (10-x)^2$; f) $(6a-7)^2 = (7-6a)^2$;
g) $\left(\frac{2}{5}\cdot x + 5\right)^2$; h) $(4x^2-1)\cdot(4x^2+1) = (2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(4x^2+1)$;
i) $(4+9x^2)\cdot(4-9x^2) = (4+9x^2)\cdot(2+3x)\cdot(2-3x)$;
j) $\left(2a^2+7b^3\right)^2$; k) $6\cdot(x+1)^2$;
l) $4x\cdot(x-3)^2$; m) $3x^2\cdot(x+2)^2$;
n) $5x^2\cdot(x^2-4)^2$;
o) $(1+x^6)\cdot(1-x^6) = (1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x^3) = (1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2) =$
$= (1+x^2)\cdot(1-x^2+x^4)\cdot(1+x)\cdot(1-x+x^2)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2)$;
p) $(x+5)\cdot(x+3)$; q) $(x-4)\cdot(x+3)$;
r) $(4x^2+3)\cdot(x^2-4) = (4x^2+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$;
s) $(2x+1)^3$; t) $(3a-b)^3$;
u) $(2x+3y)^3$; v) $(a-3)\cdot(a^2+3a+9)$;
w) $(x+4)\cdot(x^2-4x+16)$; x) $(3a+5b)\cdot(9a^2-15ab+25b^2)$.

1142 a) $(10\,000-2)\cdot(10\,000+2) = 100\,000\,000 - 4 = 99\,999\,996$;

b) $\dfrac{(526+74)\cdot(526-74)}{(726+274)\cdot(726-274)} = \dfrac{600\cdot 452}{1000\cdot 452} = 0{,}6$;

c) Legyen $a = 54\,320$:

$$\frac{54321\cdot 54325 - 54323\cdot 54320}{54323\cdot 54322 - 54321^2} = \frac{(a+1)\cdot(a+5)-(a+3)\cdot a}{(a+3)\cdot(a+2)-(a+1)^2} = \frac{3a+5}{3a+5} = 1.$$

1143 Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 23^2 - 2\cdot(-7) = 543.$$

1144 Egy polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1-et helyettesítünk.
Az $(x^2 - 3x + 1)^{2007}$ kifejezés $x = 1$ esetén:
$$(-1)^{2007} = -1.$$
Tehát a keresett polinomban az együtthatók összege –1.

1145 Legyenek a téglalap oldalai a és b. Tudjuk, hogy
$$2 \cdot (a+b) = 74,$$
$$a + b = 37,$$
másrészt
$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 1642,$$
$$a^2 + b^2 = 821.$$
Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből
$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 37^2 - 821 = 548.$$
Tehát a téglalap területe 274 cm^2.

1146 Végezzük el a következő átalakításokat:
$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a-b) \cdot [(a-b)^2 + 2ab + ab] = (a-b) \cdot [(a-b)^2 + 3ab].$$
Behelyettesítve:
$$a^3 - b^3 = 2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 7) = 50.$$

Műveletek algebrai törtekkel – megoldások

1147 *a)* $\frac{9a^3}{4b}$; *b)* $\frac{x}{2}$; *c)* $-\frac{4}{3a}$; *d)* $2a$;
e) $-\frac{4}{5} \cdot a^2$; *f)* $2y$; *g)* $\frac{2x+3}{x+5}$; *h)* $\frac{1-2x}{1+2x}$;
i) $\frac{3x+5}{4x}$; *j)* $\frac{2y+1}{4x+3}$; *k)* $\frac{x-4}{x+6}$; *l)* $\frac{2x-4}{x+2}$.

1148 *a)* $\frac{ab}{10xy}$; *b)* $\frac{3by^2}{8ax}$; *c)* $\frac{y}{x}$; *d)* a^2b;
e) $\frac{b-2}{a \cdot (b-3)}$; *f)* $\frac{3b+1}{b}$; *g)* $\frac{1}{x+4}$; *h)* $\frac{a-1}{a}$.

1149 *a)* $\frac{4x^2+15}{10x}$; *b)* $\frac{3-18y}{4y^2}$; *c)* $\frac{a+7}{a \cdot (a+1)}$; *d)* $\frac{1}{3}$;
e) $\frac{21-12x}{10 \cdot (2x-1)}$; *f)* $\frac{5a-14}{12 \cdot (3a+5)}$; *g)* $-\frac{1}{6}$; *h)* $\frac{8}{(x+2) \cdot (x-2)}$;
i) 1; *j)* $\frac{y^2-10y-27}{3 \cdot (y+5)^2}$; *k)* $\frac{4x^2+22x-5}{(2x-5) \cdot (2x+5)^2}$; *l)* $\frac{y^2-4y-7}{(y+1)^3}$.

1150 *a)* A tört értelmezve van, ha $4ab^2+4abc\neq 0$, azaz $4ab\cdot(b+c)\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b+c\neq 0$.
A számlálóban két négyzet különbsége áll, tehát szorzattá alakítható:

$$\frac{(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)}{4ab\cdot(b+c)}=$$

$$=\frac{2a^2\cdot 2\cdot(b^2-c^2)}{4ab\cdot(b+c)}=\frac{a\cdot(b-c)}{b}.$$

b) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val: $a^2-b^2\neq 0$, illetve $(a+b)^2\neq 0$, azaz $a+b\neq 0$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $|a|\neq|b|$.
A számlálókat és a nevezőket is alakítsuk szorzattá, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{ab\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{a^2\cdot(a+b)}{(a+b)^2}-\frac{a^2-2ab}{a+b}=\frac{ab}{a+b}+\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^2-2ab}{a+b}=\frac{3ab}{a+b}.$$

c) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val:

$$\begin{array}{rrrr} a^3-ab^2\neq 0, & & & \\ a\cdot(a^2-b^2)\neq 0, & & a^2+ab\neq 0, & b^2+ab\neq 0, \\ a\cdot(a-b)\cdot(a+b)\neq 0; & a+b\neq 0; & a\cdot(a+b)\neq 0; & b\cdot(a+b)\neq 0. \end{array}$$

Minden feltétel teljesül, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$, $|a|\neq|b|$.
A zárójeleken belül hozzunk közös nevezőre:

$$\left(\frac{b^2}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}\right):\left(\frac{(a-b)\cdot b}{ab\cdot(a+b)}-\frac{a^2}{ab\cdot(a+b)}\right)=$$

$$=\frac{b^2+a^2-ab}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{ab\cdot(a+b)}{ab-a^2-b^2}=\frac{-1}{a-b}\cdot b=\frac{b}{b-a}.$$

1151 *a)* Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalán álló kifejezéseket. Közös nevezőre hozás után egyszerűsítsünk, majd újra hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{6ab-a^2-9b^2}{3b}\cdot\frac{a-6b}{a^2-6ab+9b^2}+\frac{a}{3b}\cdot\frac{a-3ab-6b}{a}=$$

$$=\frac{-1}{3b}\cdot(a-6b)+\frac{a-3ab-6b}{3b}=\frac{-a+6b+a-3ab-6b}{3b}=\frac{-3ab}{3b}=-a.$$

b) A módszer ugyanaz, az első nevező szorzattá alakítása:

$$a^3-a^2-a+1=a^2\cdot(a-1)-(a-1)=(a-1)\cdot(a^2-1)=(a-1)^2\cdot(a+1).$$

Ezt beírva egyszerűsíthetünk az első zárójelben:

$$\frac{4a^2-1}{(a-1)^2\cdot(a+1)}\cdot\frac{(1-a)^2}{a}=\frac{4a^2-1}{a\cdot(a+1)}=\frac{(2a-1)\cdot(2a+1)}{a\cdot(a+1)}. \qquad (1)$$

A második zárójelben legyen a közös nevező $a\cdot(a-1)\cdot(a+1)$, ekkor

$$\frac{4a\cdot(a+1)-2\cdot(a-1)-8a}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{4a^2-6a+2}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}. \qquad (2)$$

A számlálót alakítsuk szorzattá:

$$4a^2-6a+2=4a^2-4a-2a+2=4a\cdot(a-1)-2\cdot(a-1)=$$
$$=(a-1)\cdot(4a-2)=2\cdot(a-1)\cdot(2a-1).$$

Ezt (2)-be beírva egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2\cdot(a-1)\cdot(2a-1)}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{2\cdot(2a-1)}{a\cdot(a+1)}.$$

(1) és (3) alapján az eredeti kifejezés:

$$\frac{(2a-1)\cdot(2a+1)}{a\cdot(a+1)}\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{2\cdot(2a-1)}=\frac{2a+1}{2}.$$

1152 Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=$$
$$=\frac{a^2-ab-ab}{a-b}\cdot\frac{a-b}{ab-ab+b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{2a-b}{a}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{a^2-2ab}{b^2}-\frac{2a^2-ab}{2b^2}=\frac{-3ab}{2b^2}=-\frac{3a}{2b}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{3a}{2b}=-6$, amiből $a=4b$ következik.

Behelyettesítve a kiszámítandó törtbe:

$$\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{10b}{5b}=2.$$

Oszthatóság, számrendszerek – megoldások

1153 *a)* 4-re végződik. *b)* 2-re végződik. *c)* 1-re vagy 6-ra végződik.

1154 *a)* Ha n osztható 4-gyel. *b)* Nincs ilyen n.
c) Ha $n=4k+2$ alakú természetes szám.

1155 *a)* $x=y=0$. *b)* $x=1; 4; 7$. *c)* Ha $y=0$, $x=0; 3; 6; 9$. Ha $y=8$, $x=1; 4; 7$.
d) Ha $y=0$, $x=7$. Ha $y=5$, $x=2$.

1156 $18a-6b=14a+2\cdot(2a-3b)$.

1157 $8a-3b=2\cdot(a+b)+(6a-5b)$.

1158 *a)* Az utolsó jegyek összege: $6+4=10$. *b)* A hatványok összege 5-re végződik.
c) Mindegyik hatványalap osztható 3-mal.

1159 *a)* $p=2$.
b) Csak páros lehetne p, de a 21 nem prím, tehát nincs ilyen prímszám.

1160 $p=2,\ q=5,\ r=23$; vagy $p=2,\ q=11,\ r=17$.

1161 $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5;\ 3750=2\cdot 3\cdot 5^4$. A 360-nak 24, a 3750-nek 20 osztója van.

1162 12.

1163 *a)* $2^2\cdot 5\cdot 7=140$; *b)* $2^4\cdot 3^2\cdot 5^2=3600$; *c)* $2^2\cdot 3^4=324$;
d) $2^6\cdot 7^2=3136$; *e)* $3^2\cdot 5\cdot 7=315$; *f)* $2^5\cdot 5^2\cdot 17=13\,600$;
g) $2^4\cdot 3^2\cdot 11=1584$; *h)* $2^2\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13=1\,228\,500$.

1164 *a)* $\frac{2}{15}$. *b)* $\frac{2}{45}$. *c)* $\frac{13}{1764}$.

1165 1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19.

1166 $[a;b]=a\cdot b$.

1167 $a=5$; 10; 15; 45; 30; 90.

1168 *a)* 115; *b)* 581; *c)* 742; *d)* 95 285.

1169 *a)* 11110100100_2; *b)* 30311_5; *c)* 13020_6.

1170 $1001_2=9<102_3=11<23_5=13<22_7=16<101_4=17<31_6=19$.

1171 $10010110_2=410_6$.

1172 Az összeadás helyesen: $3124_5+10232_5=13411_5$.

1173 Mivel $21\,600=2^5\cdot 3^3\cdot 5^2$, és a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, ezért a megfelelő osztó: $2\cdot 3=6$.
Így a hányados valóban négyzetszám:

$$2^4\cdot 3^2\cdot 5^2=(2^2\cdot 3\cdot 5)^2=60^2.$$

1174 A 40-re végződő szám osztható 10-zel. Ha egy szám négyzete lenne, az a szám is osztható lenne 10-zel. De akkor a négyzete 100-zal is osztható lenne, ami nem teljesül.

1175 Legyen a lépcsők száma n. Ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6 többszöröseinél 1-gyel kisebb. A fenti számok legkisebb közös többszöröse 60, tehát $60\mid n+1$, azaz $n+1=60k$, ahol $k\in\mathbb{N}^+$, másrészt $7\mid n$. A legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük.
Legyen $k=1$, ekkor $n=59$, de a 7 nem osztója az 59-nek.
Ha $k=2$, akkor $n=119=17\cdot 7$.
Tehát a legkisebb megfelelő szám a 119.

1176 Amikor Tibor n éves, édesanyja $28+n$ éves. $n\mid 28+n$, ezért $n\mid 28$. Tehát Tibor életkora akkor lesz osztója az édesanyjáénak, ha ő 1, 2, 4, 7, 14, 28 éves lesz.

1177 *a)* Hamis. Ha egyik szám osztója a másiknak, akkor a legnagyobb közös osztó a kisebb szám.
b) Igaz. A legkisebb közös többszörös legalább akkora, mint a nagyobb szám.
c) Hamis. A legnagyobb közös osztó csak a közös osztóknak többszöröse.
d) Igaz. Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a többszöröseiknek is.
e) Igaz. Ha a két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legkisebb közös többszörös a szorzatuk.
f) Hamis. Például $11+2=13$.

1178 A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, a harmadik hatványban a kitevők oszthatók 3-mal.

Mivel $2 \cdot 5 = 10,\ 2 \cdot 3 = 6,$ a keresett legkisebb szám csak a 2, 3 és 5 prímtényezőket tartalmazza.

A szám prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul, a legkisebb ilyen szám az 5.

A 3 kitevője páros, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul. A legkisebb ilyen szám a 2.

Az 5 kitevője páratlan, és 3-mal osztható. A legkisebb ilyen szám a 3.

Tehát a keresett szám:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 36\,000.$$

Ennek a számnak $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) = 72$ osztója van.

1179 Az összeget rendezzük négyes csoportokba:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4n} =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \ldots + 7^{4n-4} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \ldots + 7^{4n-4}).$$

Mivel

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800,$$

ezért az összeg utolsó két számjegye 0.

1180 Számoljuk össze a számok osztóit:

$$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40},\ \text{tehát}\ 41 \cdot 41 = 1681\ \text{osztója van},$$
$$20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30},\ \text{tehát}\ 61 \cdot 31 = 1891\ \text{osztója van}.$$

Mindkét számnál figyelembe vettük a közös osztókat, ezeket el kell vennünk. A legnagyobb közös osztó $2^{40} \cdot 5^{30}$, amelynek $41 \cdot 31 = 1271$ osztója van. Tehát

$$1681 + 1891 - 1271 = 2301$$

olyan pozitív egész szám van, amely osztója a fenti számok valamelyikének.

1181 Képezzük a következő 1-es számjegyekből álló számokat:

$$A_1 = 1;\quad A_2 = 11;\quad A_3 = 111;\quad \ldots;\quad A_{2001} = 111\ldots111\ (2001\ \text{jegy}).$$

Ha van közöttük olyan szám, amely többszöröse a 2001-nek, akkor az állítást beláttuk.

Ha nincs megfelelő szám, akkor van közöttük két olyan (pl. A_i és Aj), amelynek 2001-gyel osztva a maradéka megegyezik. Képezzük A_i és A_j különbségét, ha $i > j$:

$$A_i - A_j = 111\ldots111000\ldots000\ (i - j\ \text{darab 1-es számjegy}).$$

Ez a különbség a megfelelő számjegyekből áll, és osztható 2001-gyel.

1182 A 7, 8 és 9 legkisebb közös többszöröse $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$ Ha a keresett 3 jegyű szám x, akkor

$$504 \mid 523\,000 + x.$$

Osszuk el maradékosan 523 000-t 504-gyel:

$$523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352.$$

Tehát

$$x = 504 - 352 = 152 \quad \text{vagy} \quad x = 2 \cdot 504 - 352 = 656,$$

a következő megfelelő szám már 4 jegyű.

A megoldás:

$$523\,152 \quad \text{és} \quad 523\,656.$$

1183 Az összeadandók 3 jegyűek, az összeg pedig 4 jegyű, tehát $C = 1$.

I. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 < 5$, akkor $B = A + 1$ (és $D = A + 2$).

– Ha $(D =)\ A + 2 \geq 5$, akkor $A = 3$ vagy $A = 4$, az utóbbi ellentmond az első feltételünknek. Ha $A = 3$, akkor $B = 4$, $D = 0$ és $E = 3$, ami nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek.

– Ha $D = A + 2 < 5$, akkor $A = 2$ vagy $A = 0$, az utóbbi esetben $B = 1 = C$, ami nem megfelelő. Ha $A = 2$, akkor $B = 3$, $D = 4$ és $E = 0$.

II. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 \geq 5$, akkor $A = 4$, $B = 0$, $D = 2$, de $E = 4$, és ez ellentmondás.

Tehát az összeadás helyesen:

$$231_5 + 312_5 = 1043_5.$$

Vegyes feladatok – megoldások

1184 $A = 5 < B = 6$.

1185 *a)* $\dfrac{2a+3}{(a+1)\cdot(a+3)}$; *b)* $\dfrac{6x-1}{(3x-1)\cdot(3x+1)}$; *c)* $\dfrac{4}{x+5}$; *d)* 4.

1186 *a)* $\dfrac{3}{a-b}$; *b)* $\dfrac{x+y}{5}$; *c)* $\dfrac{a-b}{a+b}$; *d)* $\dfrac{x-y}{x+y}$.

1187 *a)* 2^{10240}; *b)* 2^{-160}; *c)* 2^{-1500}; *d)* 2^{896}.

1188 *a)* $11110_2 = 30 = 1010_3 < 111_5 = 31 = 133_4$;

b) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-2} = \dfrac{49}{25} = 1\dfrac{24}{25} < \left(\dfrac{39}{26}\right)^{2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25 < \left(\dfrac{4}{13}\right)^{-1} = \dfrac{13}{4} = 3{,}25 < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8} = 3{,}375.$

1189 $96 = 2^5 \cdot 3$.

a) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$; *b)* $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$;

c) $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400$; *d)* $2^5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 576 = 24^2$;

e) $2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1728 = 12^3$; *f)* $54 = 2 \cdot 3^3$, $[54; 96] = 3^3 \cdot 2^5 = 864$.

1190 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, $x \cdot y = 5$. *d)* Igaz.

e) Hamis.

1191 A feladat az 1800 és 6000 legnagyobb közös osztójának megkeresése:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \quad \text{és} \quad 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3,$$

$$(1800; 6000) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600.$$

1192 A fürdőszoba oldalai a 60 cm többszörösei.

Az 54 000 lehetséges osztópárjai közül csak a $60 \cdot 900$ és a $180 \cdot 300$ felel meg.

Az első nem lehet egy fürdőszoba mérete, tehát a fürdőszoba oldalai 1,8 m és 3 m.

1193 *a)* A 7300 m^2 területű futballpályán körülbelül $8{,}76 \cdot 10^8$ fűszál nő.

b) Európa területére $1{,}47 \cdot 10^9$ futballpálya férne el.